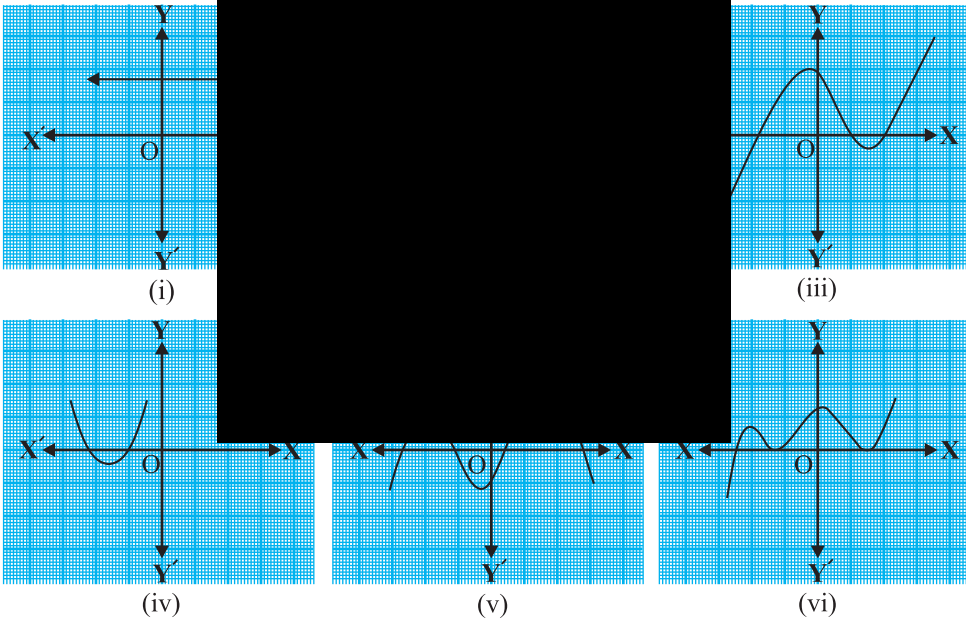


हल :

- (i) शून्यकों की संख्या 1 है, क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।
- (ii) शून्यकों की संख्या 2 है, क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है।
- (iii) शून्यकों की संख्या 3 है। (क्यों?)
- (iv) शून्यकों की संख्या 1 है। (क्यों?)
- (v) शून्यकों की संख्या 1 है। (क्यों?)
- (vi) शून्यकों की संख्या 4 है। (क्यों?)

प्रश्नावली 2.1

1. किसी बहुपद $p(x)$ के ग्राफ को देखिए। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या बताइए।



आकृति 2.10

2.3 किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

आप पहले ही देख चुके हैं कि रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $-\frac{b}{a}$ होता है। अब हम किसी द्विघात बहुपद के शून्यकों और उसके गुणांकों के संबंध में अनुच्छेद 2.1 में

उठाए गए प्रश्न का उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। इसके लिए एक द्विघात बहुपद माना $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लीजिए। कक्षा IX में, आप सीख चुके हैं कि मध्य पद को विभक्त करके कैसे किसी द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जाते हैं। इसलिए, यहाँ हमें मध्य पद '-8x' को दो ऐसे पदों के योग के रूप में विभक्त करना है जिनका गुणनफल $6 \times 2x^2 = 12x^2$ हो। अतः, हम लिखते हैं:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

इसलिए, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ का मान शून्य है, जब $x - 1 = 0$ या $x - 3 = 0$ है, अर्थात् जब $x = 1$ या $x = 3$ हो। अतः, $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक 1 और 3 हैं। ध्यान दीजिए :

$$\text{शून्यकों का योग} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

आइए, एक और द्विघात बहुपद, माना $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ लें। मध्य पद के विभक्त करने की विधि से,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (3x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

अतः, $3x^2 + 5x - 2$ का मान शून्य होगा यदि या तो $3x - 1 = 0$ हो या $x + 2 = 0$ हो, अर्थात् जब $x = \frac{1}{3}$ हो या $x = -2$ हो। इसलिए, $3x^2 + 5x - 2$ के शून्यक $\frac{1}{3}$ और -2 हैं। ध्यान दीजिए:

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

व्यापक रूप में, यदि * α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हों, तो आप जानते हैं कि $x - \alpha$ और $x - \beta$, $p(x)$ के गुणनखंड होते हैं। अतः,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ जहाँ } k \text{ एक अचर है} \\ &= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \\ &= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta \end{aligned}$$

* α, β यूनानी भाषा के अक्षर हैं, जिन्हें क्रमशः अल्फा, बीटा द्वारा उच्चरित किया जाता है। बाद में हम एक और अक्षर γ का प्रयोग करेंगे, जिसे 'गामा' से उच्चरित किया जाता है।

दोनों ओर के x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, हम पाते हैं :

$$a = k, b = -k(\alpha + \beta) \text{ और } c = k\alpha\beta$$

इससे प्राप्त होता है:
$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

अर्थात् शून्यकों का योग $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2 : द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : हम पाते हैं:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ है, अर्थात् जब $x = -2$ या $x = -5$ हो। इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -2 और -5 हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = -2 + (-5) = -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण 3 : बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ का स्मरण कीजिए। इसे प्रयोग कर, हम लिख सकते हैं:

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

इसलिए, $x^2 - 3$ का मान शून्य होगा, जब $x = \sqrt{3}$ हो या $x = -\sqrt{3}$ हो।

अतः, $x^2 - 3$ के शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण 4 : एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

$$\text{हम पाते हैं:} \quad \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{और} \quad \alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1$ है, तो $b = 3$ और $c = 2$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 3x + 2$ है।

आप जाँच कर सकते हैं कि अन्य कोई द्विघात बहुपद, जो इन शर्तों को संतुष्ट करता हो, $k(x^2 + 3x + 2)$ की तरह का होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

आइए अब हम त्रिघात बहुपद की ओर दृष्टिपात करें। क्या आप सोचते हैं कि त्रिघात बहुपद के शून्यकों और उसके गुणांकों के बीच इसी प्रकार का संबंध होता है?

आइए $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ पर विचार करें।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $x = 4, -2$ और $\frac{1}{2}$ के लिए $p(x) = 0$ है। क्योंकि $p(x)$ के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं, इसलिए $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ के यही शून्यक हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}},$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

परंतु, यहाँ एक और संबंध भी है। दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों के योग पर विचार करें। हम पाते हैं :

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

व्यापक रूप में, यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

तथा
$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5* : जाँच कीजिए कि त्रिघात बहुपद $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3, -1 और $-\frac{1}{3}$ हैं। इसके पश्चात् शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : दिए हुए बहुपद की $ax^3 + bx^2 + cx + d$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3 \text{ है। पुनः,}$$

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

अतः, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3, -1 और $-\frac{1}{3}$ हैं।

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

इसलिए, हम $\alpha = 3$, $\beta = -1$ और $\gamma = -\frac{1}{3}$ लेते हैं। अब,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\text{और } \alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $x^2 - 2x - 8$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$

(v) $t^2 - 15$

(vi) $3x^2 - x - 4$

2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं:

(i) $\frac{1}{4}, -1$

(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

(iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

(vi) $4, 1$

2.4 बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म

आप जानते हैं कि एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं। परंतु, यदि आपको केवल एक शून्यक दिया हो, तो क्या आप अन्य दो शून्यक ज्ञात कर सकते हैं? इसके लिए, आइए त्रिघात बहुपद $x^3 - 3x^2 - x + 3$ पर विचार करें। यदि हम आपको बताएँ कि उसका एक शून्यक 1 है, तो आप जानते हैं कि $x^3 - 3x^2 - x + 3$ का एक गुणनखंड $x - 1$ है। इसलिए आप $x^3 - 3x^2 - x + 3$ को $x - 1$ से भाग देकर भागफल $x^2 - 2x - 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

अब आप मध्य पद को विभक्त करके $x^2 - 2x - 3$ के गुणनखंड $(x + 1)(x - 3)$ प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

इसलिए त्रिघात बहुपद के सभी शून्यक 1, -1 और 3 हैं।

आइए अब एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने के एल्गोरिथ्म (कलन विधि) की

विवेचना कुछ विस्तार से करें। विधिवत चरणों पर ध्यान देने से पूर्व, एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 6 : $2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि जब शेषफल या तो शून्य हो जाए या इसकी घात भाजक की घात से कम हो जाए, तो हम भाग देने की प्रक्रिया को रोक देते हैं। इसलिए, यहाँ भागफल $2x - 1$ है तथा शेषफल 3 है। इसके अतिरिक्त,

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\text{अर्थात्, } 2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$$

अतः, भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल

$$\begin{array}{r} \overline{) 2x^2 + 3x + 1} \\ \underline{2x^2 + 4x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x - 2} \\ 3 \end{array}$$

अब हम यह प्रक्रिया किसी बहुपद को एक द्विघात बहुपद से भाग देने के लिए विस्तृत करते हैं।

उदाहरण 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

हल : हम सर्वप्रथम भाजक एवं भाज्य के पदों को घटती हुई घातों के क्रम में व्यवस्थित करते हैं। याद कीजिए कि बहुपदों के पद इस प्रकार व्यवस्थित करने को बहुपद को मानक रूप में लिखना कहते हैं। इस उदाहरण में, भाज्य पहले से ही मानक रूप में है तथा मानक रूप में भाजक $x^2 + 2x + 1$ है।

$$\begin{array}{r} \overline{) 3x^3 + x^2 + 2x + 5} \\ \underline{3x^3 + 6x^2 + 3x} \\ -5x^2 - x + 5 \\ \underline{-5x^2 - 10x - 5} \\ 9x + 10 \end{array}$$

चरण 1 : भागफल का पहला पद प्राप्त करने के लिए, उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् $3x^3$) को भाजक के उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् x^2) से भाग दीजिए। यह $3x$ है। तब, भाग देने की प्रक्रिया कीजिए। जो शेष बचता है वह $-5x^2 - x + 5$ है।

चरण 2 : अब भागफल का दूसरा पद ज्ञात करने के लिए, नए भाज्य के उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् $-5x^2$) को भाजक के उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् x^2) से भाग कीजिए। इससे -5 मिलता है। पुनः भाग देने की प्रक्रिया $-5x^2 - x + 5$ के साथ कीजिए।

चरण 3 : अब शेष बचे $9x + 10$ की घात भाजक $x^2 + 2x + 1$ की घात से कम है। इसलिए, हम भाग देने की क्रिया को और नहीं कर सकते हैं।

इसलिए, भागफल $3x - 5$ है तथा शेषफल $9x + 10$ है। इसके अतिरिक्त,

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) &= 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10 \\ &= 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \end{aligned}$$

यहाँ हम पुनः देखते हैं कि

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

हम यहाँ जिस एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर रहे हैं वह यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म, जिसे आप अध्याय 1 में पढ़ चुके हैं, जैसी है। इसके अनुसार

यदि $p(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ है अथवा $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात है।

यह निष्कर्ष बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म कहलाता है।

इसके उपयोग को दर्शाने के लिए, आइए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि दिए हुए बहुपद मानक रूप में नहीं हैं। भाग की क्रिया करने के लिए, हम सर्वप्रथम भाज्य और भाजक दोनों को उनकी घातों के घटते क्रम में लिखते हैं।

इसलिए, भाज्य $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ तथा भाजक $= -x^2 + x - 1$ है।

भाग देने की क्रिया दायीं ओर दिखाई गई है। हम यहाँ रुकते हैं, क्योंकि 3 की घात 0, $-x^2 + x - 1$ की घात 2 से कम है।

इसलिए भाग कि क्रिया करके शेषफल 3 तथा भागफल $x - 2$ प्राप्त होता है। अब

$$\text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

$$\begin{aligned} &= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\ &= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3 \\ &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ &= \text{भाज्य} \end{aligned}$$

अतः, विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया।

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ -x^3 + x^2 - x \\ \hline 2x^2 - 2x + 5 \\ 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

उदाहरण 9 : $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि आपको इसके दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ ज्ञात हैं।

हल : क्योंकि दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं, इसलिए $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ दिए गए बहुपद का एक गुणक है। अब आइए विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग दिए गए बहुपद और $x^2 - 2$ के लिए करें।

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 3x + 1 \\
 x^2 - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \\
 \underline{2x^4 - 4x^2} \\
 -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 \underline{-3x^3 + 6x} \\
 + - 2 \\
 \underline{-2} \\
 \underline{-2} \\
 \underline{+} \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

भागफल का प्रथम पद $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ है

भागफल का दूसरा पद $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$ है

भागफल का तीसरा पद $\frac{x^2}{x^2} = 1$ है

इसलिए $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

अब $-3x$ को विभक्त करके $2x^2 - 3x + 1$ के गुणनखंड $(2x - 1)(x - 1)$ प्राप्त होते हैं।

इसलिए, इसके शून्यक $x = \frac{1}{2}$ और $x = 1$ द्वारा दिए जाएँगे। अतः, दिए हुए बहुपद के शून्यक $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ और 1 हैं।

प्रश्नावली 2.3

- विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके, निम्न में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए :
 - $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$
 - $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$
 - $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$
- पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखंड है :

- (i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
 (ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
 (iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$
3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।
4. यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।
5. बहुपदों $p(x), g(x), q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन एल्गोरिथ्म को संतुष्ट करते हों तथा
- (i) घात $p(x) =$ घात $q(x)$ (ii) घात $q(x) =$ घात $r(x)$ (iii) घात $r(x) = 0$

प्रश्नावली 2.4 (ऐच्छिक)*

1. सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध को भी सत्यापित कीजिए :
- (i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2; \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2; 2, 1, 1$
2. एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्यकों का योग, दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफल का योग तथा तीनों शून्यकों के गुणनफल क्रमशः $2, -7, -14$ हों।
3. यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b, a, a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।
4. यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।
5. यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

2.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

- घातों 1, 2 और 3 के बहुपद क्रमशः रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
- एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के रूप का होता है।

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

3. एक बहुपद $p(x)$ के शून्यक उन बिंदुओं के x -निर्देशांक होते हैं जहाँ $y = p(x)$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।
4. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।
5. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{और} \quad \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. विभाजन एल्गोरिथ्म के अनुसार दिए गए बहुपद $p(x)$ और शून्येतर बहुपद $g(x)$ के लिए दो ऐसे बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व है कि

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

जहाँ $r(x) = 0$ है या घात $r(x) <$ घात $g(x)$ है।