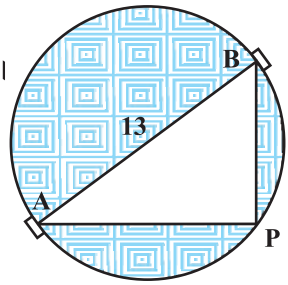
उदाहरण 17 : 13 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के एक बिंदु पर एक खंभा इस प्रकार गाड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनों अंत बिंदुओं पर बने फाटकों A और B से खंभे की दूरियों का अंतर 7 मीटर हो। क्या ऐसा करना संभव है? यदि है, तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियों पर खंभा गाड़ना है?

हल : आइए सर्वप्रथम एक चित्र बनाएँ (देखिए आकृति 4.4)।



आकृति 4.4

माना खंभे की अभीष्ट स्थिति P है। माना खंभे की फाटक B से दूरी x m है अर्थात् BP = x m है। अब खंभे की दोनों फाटकों की दूरियों का अंतर = AP – BP (या BP – AP) = 7 m है। इसलिए, AP = $(x + 7)$ m होगा।

साथ ही, AB = [redacted]

इसलिए [redacted]य द्वारा)

अर्थात् [redacted]

अर्थात् [redacted]

अर्थात् [redacted]

अतः खंभे की फाट[redacted] संतुष्ट करती है।

यह देखने के लिए [redacted]क्तकर पर विचार करें। विविक्तकर है:

$b^2 - 4ac =$ [redacted]

अतः, दिए गए [redacted] इसीलिए खंभे को पार्क की परिसीमा पर गाड़ा जा सकना संभव है।

द्विघात समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ को द्विघाती सूत्र से हल करने पर, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

इसलिए, $x = 5$ या -12 है।

चूँकि x खंभे और फाटक B के बीच की दूरी है, यह धनात्मक होना चाहिए। इसलिए, $x = -12$ को छोड़ देते हैं। अतः, $x = 5$ है।

इस प्रकार, खंभे को पार्क की परिसीमा पर फाटक B से 5m और फाटक A से $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$m की दूरी पर गाड़ना है।

उदाहरण 18 : समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि वे वास्तविक है, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 3, b = -2, c = \frac{1}{3}$ है।

इसलिए विविक्तकर $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$ है।

अत: द्विघात समीकरण के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

ये मूल $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a},$ अर्थात् $\frac{2}{6}, \frac{2}{6},$ अर्थात् $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ हैं।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए :

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना संभव है जिसकी लंबाई, चौड़ाई से दुगुनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 m^2 हो? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4. क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
   दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

5. क्या परिमाप 80 m तथा क्षेत्रफल 400 m^2 के एक पार्क को बनाना संभव है? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का होता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

2. एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही होते हैं।

3. यदि हम $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के दो रैखिक गुणकों में गुणनखंड कर सकें, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल, प्रत्येक गुणक को शून्य के बराबर करके, प्राप्त कर सकते हैं।
4. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से भी दिए गए द्विघात समीकरण को हल किया जा सकता है।
5. द्विघाती सूत्र: द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा देय होते हैं, यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो।
6. एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ में,
   (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो।
   (ii) दो बराबर मूल (अर्थात् संपाती वास्तविक मूल) होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो और
   (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो।

पाठकों के लिए विशेष

शाब्दिक समस्याओं की स्थिति में, प्राप्त हलों की जाँच समस्या के अंतर्गत बनी समीकरणों से नहीं, अपितु मूल समस्या मे दिए गए प्रतिबंधों द्वारा की जानी चाहिए (अध्याय 3 के उदाहरणों 11, 13, 19 तथा अध्याय 4 के उदाहरणों 10, 11, 12 को देखिए)।