अर्थात् $y = 15$

अब जब हमने तीनों केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का अध्ययन कर लिया है, तो आइए इस बात की चर्चा करें कि एक *विशिष्ट आवश्यकता के लिए, कौन-सा मापक अधिक उपयुक्त रहेगा।*

केंद्रीय प्रवृत्ति का अधिकतर प्रयोग होने वाला मापक माध्य है, क्योंकि यह सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है तथा दोनों चरम मानों के बीच में स्थित होता है। अर्थात्, यह संपूर्ण आँकड़ों में सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। यह हमें दो या अधिक दिए हुए बंटनों की तुलना करने में भी सहायक है। उदाहरणार्थ, किसी परीक्षा में, विभिन्न स्कूलों के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों के औसत (माध्य) की तुलना करके हम यह निष्क[redacted]र्शन बेहतर रहा।

परंतु आँकड़ों क[redacted]रणार्थ, लगभग एक-सी बारंबारताओं वाले वर्ग[redacted]तिनिधि होगा। परंतु यदि एक वर्ग की बारंबारत[redacted]ारंबारताएँ 20, 25, 20, 21 और 18 हों, तो [redacted]नहीं करेगा। अतः ऐसी स्थितियों के लिए, म[redacted] करेगा।

उन समस्याओं [redacted] हम एक 'प्रतीकात्मक' (typical) प्रेक्षण ज्ञात [redacted] रहता है। उदाहरणार्थ, किसी राष्ट्र के श्रमि[redacted]ज़दूरी, इत्यादि के लिए माध्यक एक उपयुक्त[redacted]चरम (अर्थात् बहुत बड़े या बहुत छोटे) मान [redacted]म माध्य के स्थान पर, केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक माध्यक लेते हैं।

ऐसी स्थितियों में, जहाँ अधिकतर आने वाला मान स्थापित करना हो या सबसे अधिक लोकप्रिय वस्तु का पता करना हो, तो बहुलक सबसे अधिक अच्छा विकल्प होता है। उदाहरणार्थ, सबसे अधिक देखे जाने वाला लोकप्रिय टीवी प्रोग्राम ज्ञात करने, उस उपभोक्ता वस्तु को ज्ञात करने, जिसकी माँग सबसे अधिक है, लोगों द्वारा वाहनों का सबसे अधिक पसंद किए जाने वाला रंग ज्ञात करने, इत्यादि में बहुलक उपयुक्त मापक है।

टिप्पणियाँ :

1. इन तीनों केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों में एक आनुभाविक संबंध है, जो निम्नलिखित है:

$$\textbf{3 माध्यक} = \textbf{बहुलक} + \textbf{2 माध्य}$$

2. असमान वर्गमापों वाले वर्गीकृत आँकड़ों के माध्यक भी परिकलित किए जा सकते हैं। परंतु यहाँ हम इनकी चर्चा नहीं करेंगे।

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
योग	60

3. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परंतु 60 वर्ष से कम हो।

आयु (वर्षों में)	पॉलिसी धारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है :

लंबाई (mm में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

पत्तियों की माध्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माध्यक ज्ञात करने के लिए, आँकड़ों को सतत वर्ग अंतरालों में बदलना पड़ेगा, क्योंकि सूत्र में वर्ग अंतरालों को सतत माना गया है। तब ये वर्ग 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5 में बदल जाते हैं।

5. निम्नलिखित सारणी 400 नियॉन लैंपों के जीवन कालों (life time) को प्रदर्शित करती है :

जीवन काल (घंटों में)	लैंपों की संख्या
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

एक लैंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

6. एक स्थानीय टेलीफ़ोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ :

अक्षरों की संख्या	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 29
कुलनामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

7. नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है। विद्यार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

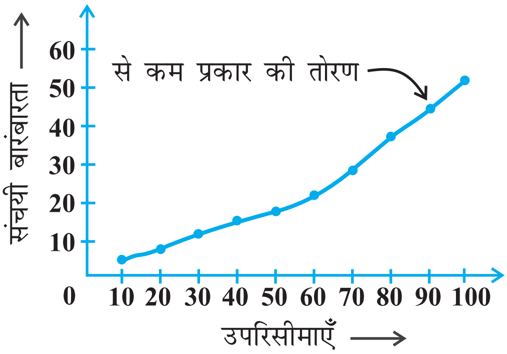
भार (किलोग्राम में)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

14.5 संचयी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण

जैसाकि हम सभी जानते हैं कि चित्र, अक्षरों से अधिक अच्छी भाषा बोलते हैं। एक आलेखीय निरूपण हमें एक ही दृष्टि में उनसे संबंधित आँकड़ों को समझने में सहायक सिद्ध होता है। कक्षा IX में, हमने दिए हुए आँकड़ों को दंड आलेखों, आयतचित्रों और बारंबारता बहुभुजों की सहायता से निरूपित किया था। आइए अब एक संचयी बारंबारता बंटन को आलेखीय रूप से निरूपित करें।

उदाहरण के लिए, आइए सारणी 14.13 में दिए संचयी बारंबारता बंटन पर विचार करें।

याद कीजिए कि मान 10, 20, 30, ..., 100 संगत वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ हैं। सारणी में दिए आँकड़ों को आलेखीय रूप से निरूपित करने के लिए, हम क्षैतिज अक्ष (x-अक्ष) पर वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ एक सुविधाजनक पैमाना (scale) लेकर अंकित करते हैं तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष (y-अक्ष) पर वही या कोई अन्य पैमाना लेकर संचयी बारंबारताएँ अंकित करते हैं। अर्थात् दोनों अक्षों पर एक ही पैमाना चुनना आवश्यक नहीं है। आइए अब एक ग्राफ पेपर पर (उपरि सीमा, संगत संचयी बारंबारता) से प्राप्त क्रमित युग्मों (ordered pairs) के संगत बिंदु (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) आलेखित करें तथा इन बिंदुओं का एक मुक्त मृदु हस्त वक्र (free hand smooth curve) द्वारा मिलाएँ। यह प्राप्त हुई वक्र से कम प्रकार की एक *संचयी बारंबारता वक्र (cumulative frequency curve)* या *तोरण (ogive)* कहलाती है (देखिए आकृति 14.1)।

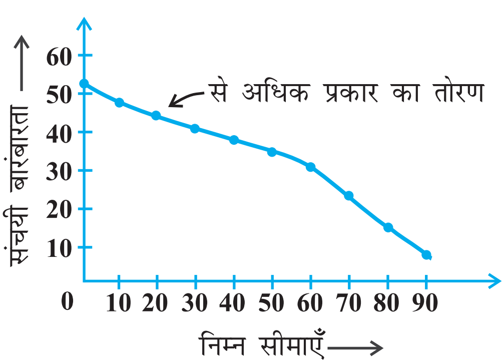


आकृति 14.1

अंग्रेज़ी के शब्द 'ogive' को 'ogeev' (ओजीव) बोला जाता है, जिसकी व्युत्पत्ति शब्द 'ogee' से हुई है। यह एक उत्तल वक्र (convex curve) के रूप में लहराती हुई एक अवतल वक्र (concave curve) के आकार की वक्र होती है। अर्थात् यह वक्र S के आकार की होती है जिसके सिरे ऊर्ध्वाधर रहते हैं। 14वीं और 15वीं शताब्दियों की गॉथिक ढंग (Gothic style) की वास्तुकला में, ogee आकार का वक्र उस कला की प्रमुख विशेषताओं में से एक है।

अब, हम पुन: सारणी 14.14 में दिए हुए (से अधिक प्रकार के) संचयी बारंबारता बंटन पर विचार करते हैं और उसका तोरण खींचते हैं।

याद कीजिए कि यहाँ 0, 10, 20, ...90 क्रमश: संगत वर्ग अंतरालों 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 की निम्न सीमाएँ हैं। 'से अधिक प्रकार' के आलेखीय निरूपण के लिए, हम उपयुक्त पैमाना लेते हुए, एक ग्राफ पेपर पर क्षैतिज अक्ष पर निम्न सीमाएँ तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष पर संचयी बारंबारताएँ अंकित करते हैं। इसके बाद, हम (निम्न सीमा, संगत संचयी बारंबारता) के अनुसार बिंदु (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38),

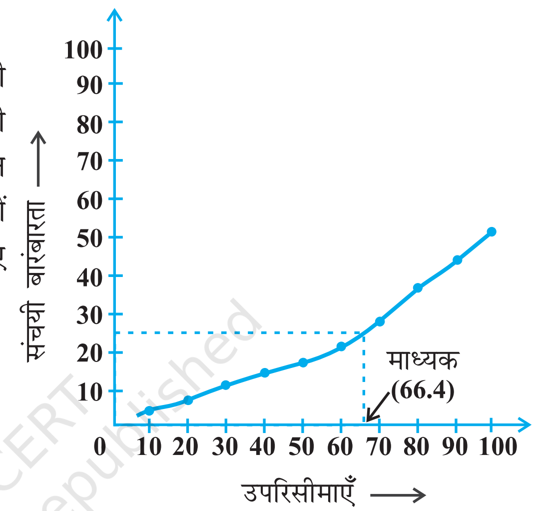


आकृति 14.2

(50, 35), (60, 31) (70, 24), (80, 15), (90, 8), आलेखित करते हैं। फिर हम बिंदुओं को एक मुक्त हस्त मृदु वक्र द्वारा मिलाते हैं। अब जो हमें वक्र प्राप्त होती है वह *'से अधिक प्रकार'* की *एक संचयी बारंबारता वक्र* या *तोरण* कहलाती है (देखिए आकृति 14.2)।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि दोनों तोरण (आकृति 14.1 और आकृति 14.2 वाले) समान आँकड़ों के संगत हैं, जो सारणी 14.12 में दिए हैं।

अब प्रश्न उठता है कि क्या तोरण किसी रूप में माध्यक से संबंधित है? क्या सारणी 14.12 के आँकड़ों के संगत खींची गई इन दोनों संचयी बारंबारता वक्रों से हम आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कर सकते हैं? आइए इसकी जाँच करें।

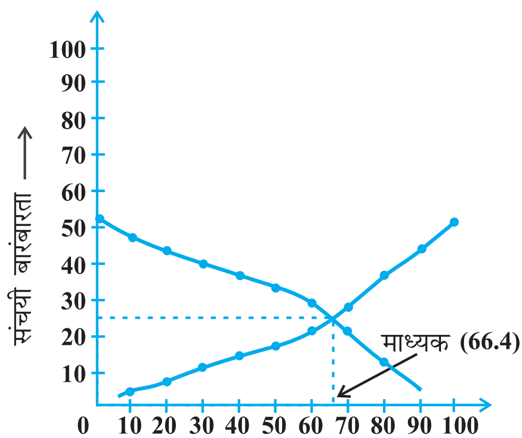


आकृति 14.3

एक स्पष्ट विधि यह है कि ऊर्ध्वाधर अक्ष पर, $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ की स्थिति ज्ञात करें (देखिए आकृति 14.3)। इस बिंदु (स्थिति) से होकर, क्षैतिज अक्ष के समांतर एक रेखा खींचिए जो उपरोक्त वक्र को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है। इस बिंदु से, क्षैतिज अक्ष पर लंब डालिए। क्षैतिज अक्ष और इस लंब के प्रतिच्छेद बिंदु से ही माध्यक निर्धारित हो जाता है (देखिए आकृति 14.3)।

माध्यक ज्ञात करने की एक अन्य विधि निम्नलिखित है :

एक ही अक्षों पर दोनों प्रकार के (अर्थात् से कम प्रकार के और से अधिक प्रकार के) तोरण खींचिए। दोनों तोरण एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस बिंदु से, हम क्षैतिज अक्ष पर लंब खींचते हैं। यह लंब क्षैतिज अक्ष को जहाँ काटता है, वही आँकड़ों का माध्यक है (देखिए आकृति 14.4)।



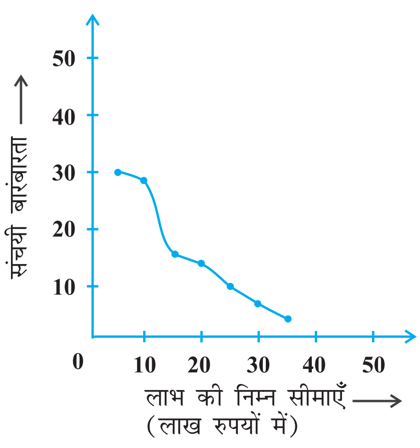
आकृति 14.4

उदाहरण 9 : किसी मोहल्ले के एक शॉपिंग कांप्लेक्स (shopping complex) की 30 दुकानों द्वारा अर्जित किए गए वार्षिक लाभों से निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त होता है :

लाभ (लाख रुपयों में)	दुकानों की संख्या
5 से अधिक या उसके बराबर	30
10 से अधिक या उसके बराबर	28
15 से अधिक या उसके बराबर	16
20 से अधिक या उसके बराबर	14
25 से अधिक या उसके बराबर	10
30 से अधिक या उसके बराबर	7
35 से अधिक या उसके बराबर	3

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक ही अक्षों पर दोनों तोरण खींचिए। इसके बाद, माध्यक लाभ ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम ग्राफ पेपर पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्ष खींचते हैं, जिनमें लाभ के अंतरालों की निम्न सीमाएँ क्षैतिज अक्ष के अनुदिश लेते हैं और संचयी बारंबारताओं का ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश लेते हैं। फिर हम बिंदुओं (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) और (35, 3) को आलेखित करके एक मुक्त हस्त वक्र से मिला देते हैं। इससे हमें 'से अधिक के प्रकार का' तोरण प्राप्त हो जाता है, जैसाकि आकृति 14.5 में दर्शाया गया है।



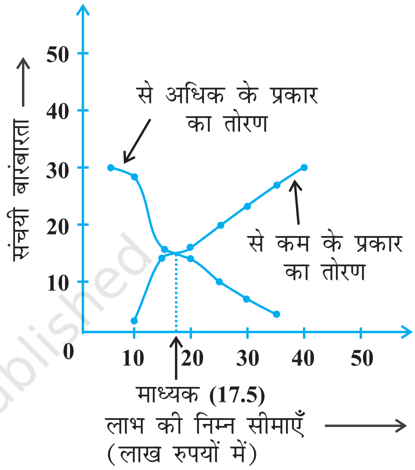
आकृति 14.5

अब आइए उपरोक्त सारणी से, वर्ग अंतराल, संगत बारंबारताएँ और संचयी बारंबारताएँ प्राप्त करें।

सारणी 14.17

वर्ग अंतराल	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
दुकानों की संख्या	2	12	2	4	3	4	3
संचयी बारंबारता	2	14	16	20	23	27	30

इन मानों का प्रयोग करके हम (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) को आकृति 14.5 वाले आलेख में आलेखित करते हैं। फिर इनको एक मुक्त हस्त वक्र द्वारा मिलाकर 'से कम के प्रकार का' तोरण प्राप्त करते हैं, जैसाकि आकृति 14.6 में दर्शाया गया है। इनके प्रतिच्छेद बिंदु से क्षैतिज अक्ष पर लंब डालने पर जो क्षैतिज अक्ष और लंब का प्रतिच्छेद बिंदु है, उसी के संगत मान से माध्यक प्राप्त होता है। यह माध्यक 17.5 लाख रुपये है।



आकृति 14.6

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण में, वर्ग अंतराल सतत (continuous) थे। तोरण खींचने से पहले यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि वर्ग अंतराल सतत हों। (कक्षा IX में दी आयत चित्रों की रचनाएँ भी देखिए।)

प्रश्नावली 14.4

1. निम्नलिखित बंटन किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक आय दर्शाता है :

दैनिक आय (रुपयों में)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

'उपरोक्त बंटन को एक कम प्रकार' के संचयी बारंबारता बंटन में बदलिए और उसका तोरण खींचिए।

2. किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों की मेडिकल जाँच के समय, उनके भार निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड किए गए :

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
38 से कम	0
40 से कम	3
42 से कम	5
44 से कम	9
46 से कम	14
48 से कम	28
50 से कम	32
52 से कम	35

उपरोक्त आँकड़ों के 'लिए कम प्रकार का तोरण' खींचिए। इसके बाद माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित सारणी किसी गाँव के 100 फार्मों में हुआ प्रति हेक्टेयर (ha) गेहूँ का उत्पादन दर्शाते हैं :

उत्पादन (kg/ha)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
फार्मों की संख्या	2	8	12	24	38	16

इस बंटन को 'अधिक के प्रकार के' बंटन में बदलिए और फिर उसका तोरण खींचिए।

14.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निम्नलिखित प्रकार ज्ञात किया जा सकता है :

(i) प्रत्यक्ष विधि: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) कल्पित माध्य विधि $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) पग-विचलन विधि: $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

इनमें यह मान लिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु, अर्थात् वर्ग चिह्न पर केंद्रित है।

2. वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ संकेत अपना स्वाभाविक अर्थ रखते हैं।

3. किसी बारंबारता बंटन में किसी वर्ग की संचयी बारंबारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारंबारताओं का योग होता है।

4. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$$

जहाँ संकेत अपना स्वाभाविक अर्थ रखते हैं।

5. संचयी बारंबारता बंटनों को आलेखीय रूप से संचयी बारंबारता वक्रों या 'से कम प्रकार के' या 'से अधिक प्रकार के' तोरण द्वारा निरूपण।

6. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक इनके दोनों प्रकार के तोरणों के प्रतिच्छेद बिंदु से क्षैतिज अक्ष पर लंब डालकर लंब और क्षैतिज अक्ष के प्रतिच्छेद बिंदु के संगत मान से प्राप्त हो जाता है।

पाठकों के लिए विशेष

वर्गीकृत आँकड़ों के बहुलक और माध्यक का परिकलन करने के लिए, सूत्र का प्रयोग करने से पहले यह सुनिश्चित किया जाना चाहिए कि वर्ग अंतराल सतत हैं। इसी प्रकार का प्रतिबंध का प्रयोग तोरण की संरचना के लिए भी करते हैं। अग्रत:, तोरण की स्थिति में प्रयुक्त पैमाना दोनों अक्षों पर समान नहीं भी हो सकता है।